SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Mauro Fabrizio

ENERGIE LIBERE IN VISCOELASTICITÀ E APPLICAZIONI ALLE EQUAZIONI ALE DERIVATE PARZIALI

12 marzo 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Energie libere in viscoelasticità e applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.*

Mauro Fabrizio†

1 Introduzione

Nei materiali con fading memory, lo stato è dato dalla storia. In questo lavoro mostreremo come sia più naturale definire lo stato mediante la risposta fornita dallo stress quando è sottoposto ad un processo di deformazione costante. Inoltre metteremo in evidenza il significato e l'importanza di determinare una norma naturale nello spazio dei processi e degli stati per un materiale con fading memory. A tal fine mostreremo come l'idea considerata da Gentili in [12], di introdurre una topologia nello spazio dei processi attraverso la continuità del lavoro, fornisca una topologia naturale nello spazio degli stati, che Gentili dimostra essere duale rispetto a quella dei processi. Questo punto di vista sembra particolarmente utile nello studio dei PDEs connesse a tali problemi. Per questa ragione l'articolo finisce con un'applicazione alle equazioni integro-differenziali della viscoelasticità. Per tale problema, grazie a questi nuovi spazi e senza alcuna ipotesi sul valore del coefficiente $G'(0)$ e sulla regolarità del nucleo $G''(s)$, possiamo provare l'esistenza, l'unicità e il decadimento asintotico delle soluzioni.

2 Fading memory e termodinamica

Un materiale viscoelastico è definito da una equazione costitutiva che lega il tensore dello stress T al gradiente di deformazione F mediante un funzionale del tipo

$$T(x,t) = \hat{T}(F^t(x)),$$

dove $F^t(x,s) = F(x,t-s)$ è la storia del gradiente di deformazione F. Nel caso lineare abbiamo

$$T(x,t) = G_0(x)E(x,t) + \int_0^{\infty} G'(x,s)E^t(x,s)\, ds,$$

*Questa ricerca è stata realizzata con il contributo del GNFM (INDAM) e in parte sostenuta dal MIUR (Cofin 2002) attraverso il progetto di ricerca *"Mathematical models for materials science" e dall'Università di Bologna - Fondi per progetti pluriennali.*

† *Univerità di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italia, e-mail fabrizio@dm.unibo.it*

dove $E = \dfrac{\nabla u + (\nabla u)^T}{2}$ è il tensore di deformazione. Inoltre, $G_0(x)$ e $-G'(x,s)$ sono tensori simmetrici e definiti positivi, così

$$G_\infty(x) := G_0(x) + \int_0^\infty G'(x,s)ds.$$

Naturalmente, questo studio può essere applicato all'equazione costitutiva non lineare del tipo

$$T(x,t) = G_0(x)\Phi(F(x,t)) + \int_0^\infty G'(x,s)\Phi(F^t(x,s))\, ds, \tag{1}$$

dove $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una funzione dispari rispetto ad F, non lineare e regolare.

Una applicazione $P : [0, d_p) \rightarrow Lin$ continua a tratti e definita come:

$$P(t) = \dot{E}(t), \qquad t \in [0, d_p)$$

è chiamata *processo cinetico* di durata $d_p \in \mathbb{R}^+$.

Definizione 1 *Un* materiale semplice *è dato dall'insieme* $(\Pi, \Sigma, \hat{\rho}, \hat{T})$:

a - *Π è l'insieme dei processi cinetici definito come:* $\Pi = \{P : [0, d_p) \rightarrow Lin$ *continui a tratti; se $P_1, P_2 \in \Pi$, allora $P_1 * P_2 \in \Pi$, dove*

$$P_1 * P_2(t) = \begin{cases} P_1(t)\,, & se \quad t \in [0, d_{p_1}) \\ P_2(d_{p_1} - t), & se \quad t \in [d_{p_1}, d_{p_1} + d_{p_2}) \end{cases},$$

inoltre, se $P \in \Pi$, allora $P_{[t_1,t_2)} \in \Pi$, $[t_1, t_2) \subset [0, d_p)\}$

b - *Σ è lo spazio degli stati, i suoi elementi sono indicati con σ,*

c - *la applicazione $\hat{\rho} : \Sigma \times \Pi \rightarrow \Sigma$ è chiamata* funzione di evoluzione, *tale che se σ^i è lo stato inizale e P è un processo: $\hat{\rho}\left(\sigma^i, P\right) = \sigma^f$,*

d - *la applicazione $\tilde{T} : \Sigma \times \Pi \rightarrow \Gamma$ è la funzione risposta che, ad ogni stato σ e ad ogni processo P, assegna il processo del tensore stress T^P su tutto l'intervallo temporale $[0, d_p)$. Cioè*

$$T^P(t) = \tilde{T}(\sigma, P)(t)\,, \quad t \subset [0, d_p)\,.$$

Definizione 2 *Il sistema è chiamato causale, se la pririetà d della Definizione 1 si può sostituire con la nuova condizione*

d' - *la applicazione $\hat{T} : \Sigma \times Lin \rightarrow Sym$ è tale che*

$$T(t) = \hat{T}(\sigma(t), P(t)).$$

Osservazione 1 *In questo articolo consideriamo solo sistemi causali, per i quali, poichè $\sigma(t) = \hat{\rho}(\sigma, P_t)$, la funzione $\tilde{T}$ è legata a $\hat{T}$ dalla relazione*

$$\hat{T}(\hat{\rho}(\sigma, P_t), P(t)) = \tilde{T}(\sigma, P)(t)$$

Un materiale viscoelastico è un materiale semplice dove lo stato è dato dalla storia $\sigma = (E^t) = (E(t), E^t_r)$ e il processo da

$$P(t) = \dot{E}(t), \qquad t \in [0, d_p).$$

In seguito consideriamo il lavoro W del processo P, definito come

$$W(\sigma, P) = \int_0^{d_p} \hat{T}(\sigma(t), P(t)) \cdot L(t)dt.$$

Definizione 3 (Noll, 72) *Due strain storie E^t_1, E^t_2 si dicono equivalenti se per ogni processo $\dot{E}^P : [0, d_P) \to Sym$, soddisfano*

$$\hat{T}\left(E^t_1, \dot{E}^P\right) = \hat{T}\left(E^t_2, \dot{E}^P\right),$$

o analogamente, come provato da Gentili, [12], due storie si dicono equivalenti se per ogni processo $\dot{E}^P : [0, d_P) \to Sym$ abbiamo

$$W\left(E^t_1, \dot{E}^P\right) = W\left(E^t_2, \dot{E}^P\right).$$

Teorema 1 (Del Piero, Deseri, 96, 97) *Nel caso lineare, due storie E^t_1, E^t_2 sono equivalenti se e solo se $E_1(t) = E_2(t)$ e*

$$\int_0^\infty G'(s+\tau)E^t_1(s)ds = \int_0^\infty G'(s+\tau)E^t_2(s)ds, \quad \forall \tau \geq 0. \tag{2}$$

Secondo la definizione di stato, due coppie $(E_1(t), E^t_1(\tau))$ e $(E_2(t), E^t_2(\tau))$ equivalenti (nel senso di Noll) sono rappresentate dallo stesso stato $\sigma(t)$ (vedere [14]). In altre parole lo stato può essere rappresentato dalla coppia

$$\sigma(t) = (E(t), \tilde{I}^t(\tau)) = I^t(\tau),$$

dove

$$\tilde{I}^t(\tau) = -\int_0^\infty G'(s+\tau)E^t(s)ds.$$

Definizione 4 (Gentili, 02) *Un processo $\dot{E}^P : [0, \infty) \to Sym$ è detto processo a lavoro finito se*

$$W(0^\dagger, \dot{E}^P) = \int_0^{d_P} T(0^\dagger, \dot{E}^P_{[0,\tau)}) \cdot \dot{E}^P(\tau)d\tau < \infty.$$

Inoltre, il lavoro $W(0^\dagger, \dot{E}^P)$ nel caso lineare si può scrivere nella forma

$$
\begin{aligned}
W(0^\dagger, \dot{E}^P) &= \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\
&= \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c(\omega) \dot{E}_+^P(\omega) \cdot \overline{\dot{E}_+^P(\omega)} d\omega,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dove $\check{G} = G(s) - G_\infty$, $\check{G}_c$ e $\dot{E}_+^P$ sono le trasformate di Fourier di $\check{G}$ e di $\dot{E}^P$.

L'insieme dei processi a lavoro finito è dato da

$$
\mathcal{H}_G = \left\{ \dot{E}^P ; \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds < \infty \right\}. \tag{4}
$$

Questo insieme è uno spazio di Hilbert se il kernel $\check{G}$ soddisfa la Seconda Legge della Termodinamica (i.e. $\check{G}_c(\omega) > 0$) e la norma è data da

$$
\begin{aligned}
\left\| \dot{E}^P \right\|^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c(\omega) \dot{E}_+^P(\omega) \cdot \overline{\dot{E}_+^P(\omega)} d\omega.
\end{aligned}
$$

Il dominio di definizione degli stati ammissibili è l'insieme di tutte le storie di deformazione che rendono il lavoro ben definito quando il processo appartiene a $\mathcal{H}_G$.

$$
\begin{aligned}
W(I^t, \dot{E}^P) = \; & \frac{1}{2} G_\infty E(d_P) \cdot E(d_P) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \check{G}(|\tau - s|) \dot{E}^P(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau ds \\
& + G_\infty^{-1} I^t(0) \cdot E(d_P) - \int_0^\infty \tilde{I}^t(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau < \infty.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Quindi l'insieme degli stati ammissibili $\tilde{I}^t(\cdot, E^t)$ è dato dal duale $\mathcal{H}'_G$ di $\mathcal{H}_G$, cioè

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}'_G &= \left\{ \tilde{I}^t(\tau) ; \int_0^\infty \tilde{I}(\tau) \cdot \dot{E}^P(s) d\tau < \infty, \forall \dot{E}^P \in \mathcal{H}_G \right\} \\
&= \left\{ \tilde{I}^t(\tau) ; \int_0^\infty \int_0^\infty G^*(|\tau - \tau'|) \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau') d\tau d\tau' < \infty \right\},
\end{aligned}
$$

dove $(G^*)_F = \check{G}_c^{-1}(\omega)$.

L'insieme $\mathcal{H}'_G$ è uno spazio di Hilbert se la norma è data da

$$
\begin{aligned}
\left\| \tilde{I}^t \right\| &= \int_0^\infty \int_0^\infty G^*(|\tau - \tau'|) \tilde{I}^t(\tau) \cdot \tilde{I}^t(\tau') d\tau d\tau' \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \check{G}_c^{-1}(\omega) \tilde{I}_c^t(\omega) \cdot \tilde{I}_c^t(\omega) d\omega
\end{aligned}
$$

Definizione 5 *Una coppia* $(\sigma, P) \in \Sigma \times \Pi$ *è detta ciclo se:*

$$\hat{\rho}(\sigma, P) = \sigma.$$

Seconda Legge per i processi isotermici.
Per ogni ciclo$(\sigma, P) \in \Sigma \times \Pi$ *vale la disuguaglianza*

$$\oint_0^d T(\sigma(\tau), P(\tau)) \cdot L(\tau) \, d\tau \geq 0 \tag{6}$$

Per i materiali fading memory, i cicli sono molto rari. Per questa ragione consideriamo una nuova forma della Seconda Legge.

Forma Forte della Seconda Legge (per i processi isotermici) [7].
Sia $\Sigma_\sigma := \{\sigma'; \exists\, P \in \Pi;\, \hat{\rho}(\sigma, P) = \sigma'\}$. *L'insieme dei lavori che si ottiene passando da uno stato* σ *ad un arbitrario stato* $\sigma' \in \Sigma_\sigma$

$$\mathcal{W}(\sigma) := \{W(\sigma, P);\ P \in \Pi\}$$

è limitato inferiormente. C'è uno stato σ_0 , *chiamato stato zero, tale che*

$$\inf \mathcal{W}(\sigma_0) = 0.$$

Questa ultima definizione della Seconda Legge soddisfa il Principio di Dissipazione dato da Gurtin & Herrera in [15].

Come mostrato in [10] dalla Seconda Legge della Termodinamica abbiamo

$$G'_s(\omega) = \int_0^\infty G'(s) \sin \omega s ds < 0\ , \quad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R}^{++} \tag{7}$$

mentre dalla Forma Forte della Seconda Legge, si ha

$$G_\infty > 0. \tag{8}$$

Definizione 6 *Una funzione* $\psi : \mathcal{D}_\psi \to \mathbf{R}^+$ *è chiamata energia libera se*

a - *il dominio* $\mathcal{D}_\psi \subset \mathcal{D} = \Sigma$ *è tale che per ogni* $\sigma_1 \in \mathcal{D}_\psi$ *e* $P \in \Pi$, *lo stato* $\sigma = \hat{\rho}(\sigma_1, P) \in \mathcal{D}_\psi$,

b - $\sigma_0 \in \mathcal{D}_\psi$ *e* $\psi(\sigma_0) = 0$,

c - *per ogni coppia* σ_1, $\sigma_2 \in \mathcal{D}_\psi$ *e* $P \in \Pi$ *tale che* $\hat{\rho}(\sigma_1, P) = \sigma_2$*:*

$$\psi(\sigma_2) - \psi(\sigma_1) \leq W(\sigma_1, P) \tag{9}$$

Nella viscoelasticità lineare, ci sono molte energie libere [2], [4], [11]. La famiglia $\mathcal{F}$ delle energie libere è un insieme convesso. Questo insieme $\mathcal{F}$ presenta un minimo e un massimo ψ_m, ψ_M.

L'energia libera massima è stata considerata in [7]

$$\psi_M\left(E^t\right) = \frac{1}{2}G_\infty E\left(t\right)\cdot E\left(t\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty G_{12}(s_1-s_2)\left(E^t\left(s_1\right)-E\left(t\right)\right)\cdot\left(E^t\left(s_2\right)-E\left(t\right)\right)ds_2ds_2 \quad (10)$$

dove $G_{12}(s_1-s_2) = \dfrac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2}G(|s_1-s_2|)$.

Se $G'\left(s\right) < 0$ e $G''\left(s\right) \geq 0$, c'è un'energia libera intermedia, chiamata energia libera di Graffi-Volterra, data da

$$\begin{aligned}\psi_G\left(E^t\right) &= \frac{1}{2}G_\infty E\left(t\right)\cdot E\left(t\right)\\ &-\frac{1}{2}\int_0^\infty G'\left(s\right)\left(E^t\left(s\right)-E\left(t\right)\right)\cdot\left(E^t\left(s\right)-E\left(t\right)\right)ds. \quad (11)\end{aligned}$$

L'energia libera minima è stata trovata da Bruer e Onat nel 1964 [1] nella seguente forma

$$\Psi_m(\dot{E}_m) = \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty \check{G}(|s_1-s_2|)\dot{E}_m(s_1)\cdot\dot{E}_m\left(s_2\right)ds_1ds_2, \quad (12)$$

dove $\dot{E}_m$ è il processo ottimale che fornisce il massimo lavoro recuperabile, ma non è un funzionale della storia $E^t\left(s\right)$ o dello stato $I^t = (E(t),\tilde{I}^t(\tau))$.

Golden [13] ha dato una rappresentazione dell'energia libera minima in termini di $\tilde{I}^t(\tau)$ come

$$\Psi_m(\tilde{I}^t) = \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty H(\tau,\tau')\tilde{I}^t(\tau)\cdot\tilde{I}^t(\tau')d\tau d\tau', \quad (13)$$

dove $H(\tau,\tau')$ è un opportuno kernel dipendente da $\check{G}$.

Introduco infine alcune nuove energie libere scritte come funzioni di $\tilde{I}^t(\cdot)$. La prima è data da

$$\begin{aligned}\Psi_1(\tilde{I}^t) &= \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \check{G}^*(|\tau-\tau'|)\tilde{I}^t(|\tau|)\cdot\tilde{I}^t(|\tau'|)d\tau d\tau'\\ &= \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \check{G}_c^{-1}(\omega)\tilde{I}_c^t(\omega)\cdot\tilde{I}_c^t(\omega)d\omega,\end{aligned}$$

dove $(\check{G}^*)_F = \check{G}_c^{-1} > 0$. La seconda è

$$\Psi_2(\tilde{I}^t) = \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t)+\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{G}^{-1}(\tau)\tilde{I}^t(\tau)\cdot\tilde{I}^t(\tau)d\tau,$$

dove $\dot{G}(s) < 0$, $\ddot{G}(s) \geq 0$.

3 Applicazioni alla viscoelasticità lineare

3.1 Comportamento asintotico

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali connessa con un materiale viscoelastico e definita nel dominio $Q = \Omega \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(x,t) &= \nabla \cdot (G_0(x)\nabla u(x,t) + \int_0^\infty G'(x,s)\nabla u^t(x,s)ds) \\ &= \nabla \cdot (G_0(x)\nabla u(x,t) + \int_0^t G'(x,s)\nabla u^t(x,s)ds) + \nabla \cdot \tilde{I}^0(x.t), \end{aligned} \tag{14}$$

dove $\tilde{I}^0(x,t) = \int_0^\infty G'(x,s+t)\nabla u^{t=0}(x,s)ds$. Assumiamo inoltre come condizioni iniziali

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x) \ ; \quad u^{t=0}(x,s) = u^0(x,s), \ s \in \mathbb{R}^+ \tag{15}$$

e come condizioni al contorno

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

Per ottenere una definizione rigorosa della soluzione debole nell'intervallo temporale $\mathbb{R}^+$, dobbiamo introdurre lo spazio di funzioni

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, V(\Omega)) \quad = \quad & \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V(\Omega)); \\ & \int_0^\infty \int_0^\infty \langle \check{G}(\tau - \tau')u(\tau), u(\tau')\rangle_V \, d\tau d\tau' < \infty \Big\} \end{aligned}$$

e il suo duale $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^+, V(\Omega))$. Indichiamo poi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) &= \{u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)); \dot{u} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))\} \\ \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) &= \{u \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)); \ \ \dot{u} \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))\} \end{aligned}$$

Ora consideriamo il nuovo spazio $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ ottenuto dall'insieme delle trasformate di Fourier $\hat{u}(\omega)$ per ogni $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ e indichiamo con $\hat{\mathcal{L}}'(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ il duale di $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$. Sicuramente il teorema di Plancherel per le trasformate di Fourier definisce un isomorfismo naturale tra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ e $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$.

Definizione 7 *Una funzione $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ è detta soluzione debole del problema differenziale (14)-(16) con $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\dot{u}_0 \in L^2(\Omega)$, e $u^0(x,\cdot)$ tale che $\tilde{I}^{t=0}(x,\tau) = -\int_0^\infty G'(x,s+\tau)\nabla u^0(x,s)ds \in \mathcal{L}'(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, se $u(x,0) = u_0(x)$ quasi ovunque in Ω e*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_\Omega \dot{u}(x,t) \cdot \dot{\phi}(x,t) - \Big\{ G_0 \nabla u(x,t) + \int_0^t G'(s)\nabla u^t(x,s)ds \Big\} \cdot \nabla\phi(x.t)dx \\ = -\int_\Omega \dot{u}_0(x) \cdot \phi(x,0)dx + \int_0^\infty \int_\Omega \tilde{I}^{t=0}(x,\tau) \cdot \nabla\phi(x,\tau)d\tau dx \end{aligned} \tag{17}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$.

Se indichiamo con $a(u,\phi)$ la forma sesquilineare su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$

$$a(u,\phi) = \int_0^\infty \int_\Omega \dot{u}(x,t)\cdot\dot{\phi}(x,t) - \left\{G_0 \nabla u(x,t) + \int_0^t G'(s)\nabla u^t(x,s)ds\right\}\cdot \nabla\phi(x.t)dx$$

per ogni $\phi \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)$ e tale che $\varphi(x,0) = 0$, allora l'equazione (17) si può scrivere come

$$a(u,\phi) = -\int_\Omega \dot{u}_0(x)\cdot\phi(x,0)dx + \int_0^\infty \int_\Omega \tilde{I}^{t=0}(x,\tau)\cdot\nabla\phi(x,\tau)d\tau dx.$$

Adesso possiamo enunciare il seguente

Teorema 2 *Sotto le ipotesi (7)-(8) per la funzione rilassamento G, il problema (14)-(16) ammette una ed una sola soluzione debole $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$.*

Con un semplice cambiamento di variabili, è sempre possibile ottenere la condizione iniziale uguale a zero. Quindi, senza perdere in generalità supporremo $u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = 0$. Indichiamo con $\hat{a}$ la forma sesquilineare su $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$

$$\hat{a}(\hat{u},\hat{\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_\Omega -i\omega\hat{u}(x,\omega)\left[i\omega\hat{\varphi}(x,\omega)\right]^* dxd\omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_\Omega \left[G_0(x) + \hat{G}'(x,\omega)\right]\nabla\hat{u}(x,\omega)\cdot\nabla\hat{\varphi}^*(x,\omega)\,\omega dxd\omega$$

per ogni $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$. Il teorema di Plancherel applicato a (17) dà

$$\hat{a}(\hat{u},\hat{\varphi}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_\Omega \tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega)\cdot\nabla\hat{\varphi}^*(x,\omega)\,dxd\omega \tag{18}$$

Lemma 3 *Una funzione $\hat{u} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ è una trasformata di Fourier di una soluzione debole del problema a valori iniziali a contorno (14)-(16) nel senso della Definizione 5 se e solo se vale l'uguaglianza (18) per ogni $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{L}}'(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$.*

Ponendo nella (18), $\hat{\varphi}(x,\omega) = \varphi_1(x)\varphi_2(\omega)$, con $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$ e $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R})$, dalla scelta arbitraria di φ_2 segue che, per quasi tutti $\omega \in \mathbb{R}$, vale la seguente identità:

$$\int_\Omega \omega^2\hat{u}(x,\omega)\hat{\varphi}_1^*(x)\,dx + \int_\Omega \left[G_0(x) + \hat{G}'(x,\omega)\right]\nabla\hat{u}(x,\omega)\cdot\nabla\hat{\varphi}_1^*(x)\,dx$$

$$= -\int_\Omega \tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega)\cdot\nabla\varphi_1^*(x)\,dx, \tag{19}$$

per ogni $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$. Ma l'identità (19) significa che $\hat{u}(\cdot,\omega)$ è una soluzione generalizzata in $H^1(\Omega)$ per il problema ellittico

$$\begin{gathered}-\omega^2\hat{u}(x,\omega) - \nabla\cdot\left\{\left[G_0(x) + \hat{G}'(x,\omega)\right]\nabla\hat{u}(x,\omega)\right\} = \nabla\cdot\tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega)\\ \hat{u}(x,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{gathered} \tag{20}$$

Seguendo la dimostrazione del Teorema 3 di [9] possiamo provare

Lemma 4 *Per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ il problema (20) ammette una e una sola soluzione $\hat{u}(\cdot, \omega) \in H^1(\Omega)$.*

Dalla parte reale di (20) abbiamo

$$\omega^2 |\hat{u}(x,\omega)|^2 \leq K |\nabla \hat{u}(x,\omega)|^2 + \left| \nabla \cdot \tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega) \cdot \hat{u}(x,\omega) \right|, \qquad (21)$$

dalla parte immaginaria di (20) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \hat{G}_c(x,\omega) |\omega \nabla \hat{u}(x,\omega)|^2 dx &= \int_\Omega \omega^{-1} \hat{G}'_s(x,\omega) |\omega \nabla \hat{u}(x,\omega)|^2 dx \\ &\leq C \int_\Omega \left| \tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega) \cdot \omega \nabla \hat{u}(x,\omega) \right| dx. \quad (22) \end{aligned}$$

Infine, sotto le ipotesi sulle condizioni iniziali, la disuguaglianza (22) e l'equazione (20_1) in un intorno di $\omega = 0$ forniscono la disuguaglianza

$$\left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega)(1+|\omega|)\nabla \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 \leq C \int_\Omega \left| \tilde{I}_c^{t=0}(x,\omega) \cdot \omega \nabla \hat{u}(x,\omega) \right| dx < \infty, \qquad (23)$$

Per cui da (23) e (21) abbiamo:

$$\left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega)(1+|\omega|)\nabla \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \hat{G}_c^{\frac{1}{2}}(\omega)(1+|\omega|)\omega \hat{u}(\omega) \right\|_{L^2}^2 \leq C \left\| \tilde{I}_c^{t=0}(\omega) \right\|_{\mathcal{H}'_G}^2 < \infty,$$

questo comporta che $\hat{u} \in \hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$. Inoltre l'isomorfismo tra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ e $\hat{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ garantisce che $\hat{u}$ sia la trasformata di Fuorier della soluzione $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$ del problema (14)–(16) .

3.2 Teoria dei semi-gruppi

Nello studio del sistema differenziale (14) con la teoria dei semi-gruppi, possiamo scrivere il problema (14) nella forma

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) &= v(x,t) && (24) \\ \dot{v}(x,t) &= \nabla \cdot (G_\infty \nabla u(x,t) + \int_0^\infty G'(x,s) \nabla u_d^t(x,s) ds) && (25) \\ \dot{E}_d^t(x,s) &= -\frac{d}{ds} E_d^t(x,s) - \dot{E}(x,t) && (26) \end{aligned}$$

dove $E_d^t(x,s) = E^t(x,s) - E(x,t)$. Ora lo stato è dato da $\chi = (u, v, E_d^t) \in \mathcal{K}$. Nei lavori [3], [8], [9] lo spazio $\mathcal{K}$ è un sottoinsime del dominio $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times \mathcal{S}_{\psi_G}$ e il teorema sulla stabilità è stato dimostrato con le condizioni iniziali nello spazio $\mathcal{K}$.

Quando usiamo la funzione $\tilde{I}^t(\tau)$, il sistema (24)–(26) è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) &= v(x,t) \\ \dot{v}(x,t) &= \nabla \cdot (G_\infty \nabla u(x,t) + \tilde{I}^t(0) \\ \tilde{I}^t(x,\tau) &= -\frac{d}{d\tau} \tilde{I}^t(x,\tau) - [G(\tau) E(x,t)]^{\cdot} \end{aligned}$$

dove lo stato $\chi = (u, v, \tilde{I}^t)$. Adesso possiamo usare l'energia libera ψ_2 come una norma sullo spazio degli stati, in questo modo è facile provare che lo spazio degli stati coincide con il dominio $H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega) \times \mathcal{S}_{\psi_2}$, dove $\mathcal{S}_{\psi_2} \supset \mathcal{S}_{\psi_G}$.

Teorema 5 *Sotto le ipotesi*

1. $\hat{G}'_s(\omega) = \int_0^\infty G'(s) \sin \omega s ds < 0, \;\; \omega > 0$

2. $\exists \; \alpha \in \mathbb{R}^{++}; \; 0 < -G'(s) \leq \alpha G''(s), \;\; s \in \mathbb{R}^+$

   ogni soluzione $(u, v, \tilde{I}^t)$, *con le condizioni iniziali* $\chi_0 \in \mathcal{S}_{\psi_2}$, *è tale che*

$$(\|\dot{u}(t)\|_{L^2}^2 + \Psi_2(\nabla u(t))) \leq M e^{-\mu t}(\|\dot{u}(0)\|_{L^2}^2 + \Psi_2(\nabla u(0))$$

dove M e μ sono delle opportune costanti.

References

[1] S. Breuer & E.T. Onat, On recoverable work in linear viscoelasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* **15**, 13–21 (1964).

[2] B.D. Coleman & D.R. Owen, A mathematical foundation for thermodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.* **54**, 1–104 (1974).

[3] C.M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **37**, 297–308 (1970).

[4] W.A. Day, The thermodynamics of materials with memory. *Materials with Memory*, D. Graffi ed., Liguori, Napoli, 1979.

[5] G. Del Piero & L. Deseri, On the concepts of state and free energy in linear viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **138**, 1–35 (1997).

[6] G. Del Piero & L. Deseri,On the analytic expression of the free energy in linear viscoelasticity. *J. Elasticity* **43**, 247–278 (1996).

[7] M. Fabrizio, C. Giorgi & A. Morro, Free energies and dissipation properties for systems with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **125**, 341–373 (1994).

[8] M. Fabrizio & B. Lazzari, On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids. *Arch. Rational Mech. Anal.* **116**, 139–152 (1991).

[9] M. Fabrizio & B. Lazzari, The domain of dependence inequality and asymptotic stability for a viscoelastic solid, *Non linear oscillations.* **1**, 117–133 (1998).

[10] M. Fabrizio & A. Morro, Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics. *J. Elasticity* **19**, 63–75 (1988).

[11] M. Fabrizio & A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[12] G. Gentili, Maximum recoverable work, minimum free energy and state space in linear viscoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **60**, 153–182 (2002).

[13] J.M. Golden, Free energies in the frequency domain: the scalar case. *Quart. Appl. Math.* **58**, 127–150 (2000).

[14] D. Graffi & M. Fabrizio, Sulla nozione di stato per materiali viscoelastici di tipo "rate", *Atti Acc. Lincei Rend. Fis.* (8), **83**, 201–208 (1989).

[15] M.E. Gurtin & I. Herrera, On dissipation inequalities and linear viscoelasticity. *Quart. Appl. Math.* **23**, 235–245 (1965).

[16] W. Noll, A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.* **48**, 1–50 (1972).